Chapitre I
Nombres et calculs

Un peu d'histoire ...
Les nombres ont accompagnés le développement de l'activité humaine depuis la plus haute Antiquité, sous la forme de fraction dans un premier temps (Sumériens et Égyptiens).
Cependant, très tôt, les mathématiciens de la Grèce antique ont su que les fractions ne suffiraient pas : l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est connue d'Euclide (autour de 300 avt JC).
La construction des nombres réels sera la fruit d'un long processus jusqu'au XIX^e siècle, qui verra le développement de l'analyse réelle.

Leonardo Fibonacci (1180-1250) : Cet italien, unique mathématicien de talent de son époque est convaincu de la supériorité du système d'écriture des nombres par les chiffres arabes. Dans son ouvrage, *Liber Abaci*, il explique la notation de position, les méthodes de calculs des opérations élémentaires, et la recherche d'une racine carrée ou cubique. Il résout des équations de degré 1, mais aussi certaines degré 2. Ce livre est complété par des illustrations et des problèmes, parmi lesquels l'étude de la célèbre suite qui porte maintenant son nom.

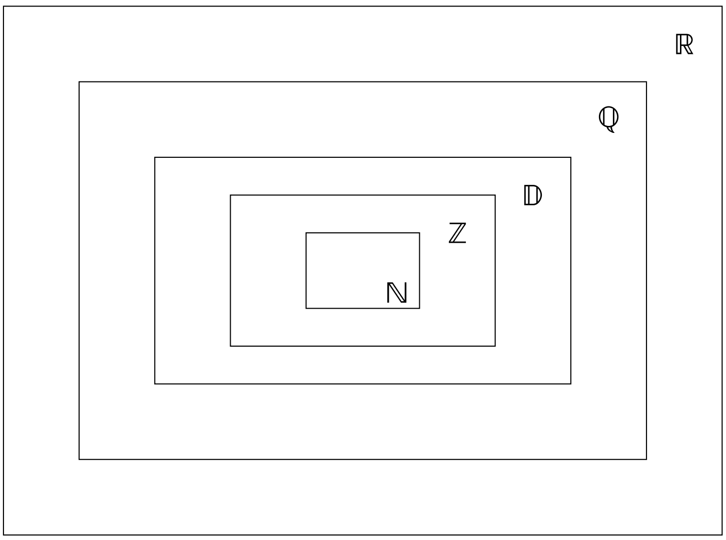
I Les ensembles de nombres

Définition 1 *On appelle* ***ensemble des réels****, noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres connus en classe de seconde. Cet ensemble est lui-même composé de sous-ensembles :*

- *L'ensemble* ***des entiers naturels****, noté $\mathbb{N}$. Ce sont les entiers positifs ou nul : 0; 1; 142; 5006...*
- *L'ensemble* ***des entiers relatifs****, noté $\mathbb{Z}$. Ce sont les entiers positifs et négatifs ou nul : 0; 1; -1; 5; -12 ...*
- *L'ensemble* ***des décimaux****, noté $\mathbb{D}$. Ce sont les nombres que l'on peut écrire avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule (éventuellement nuls) : 0; 1; -12; 1,5; $-75,41253$ ...*
- *L'ensemble* ***des rationnels****, noté $\mathbb{Q}$: Ce sont les nombres pouvant s'écrire sous forme de fraction : 0; 1; -5; $\frac{2}{3}$; $-\frac{25}{4}$...*

Remarque : Ces ensembles sont emboîtés :
Tout **entier naturel** est un **entier relatif**.
Tout **entier relatif** est un **nombre décimal**.
Tout **nombre décimal** est un **nombre rationnel**.
Tout **nombre rationnel** est un **nombre réel**.

Sur le diagramme ci-contre, placer les nombres suivants dans le bon ensemble :
$\frac{3}{4}$; -1 ; $-2,7$; 0 ; 0,33... ; π ; $\sqrt{2}$; 7 ; -18 ; 6,256



II Calculer avec les fractions

Propriété : calcul avec les fractions

Cadre : On considère deux nombres réels a, b, c et d.

$\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$ si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ **simplification**

$\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$ si $c \neq 0$ **addition** (ATTENTION : les dénominateurs doivent être identiques !)

$\dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d} = \dfrac{a \times b}{c \times d}$ si $d \neq 0$ et $c \neq 0$ **multiplication** (pas besoin d'avoir des dénominateurs égaux)

Point-méthode 1 : Calculer avec des fractions

1. Simplifier : $A = \dfrac{4}{8}$ $B = \dfrac{10 \times 7}{7 \times 5}$
2. Calculer, puis simplifier si possible :

   $C = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$ $D = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{14}{9}$ $E = \dfrac{4+3}{5+3}$ $F = 3 \times \dfrac{2}{3}$

Solution :
Pour effectuer un calcul avec des fractions, on peut procéder par étapes :

① Est-ce une somme ou un produit ?

② Si c'est une somme : On met au même dénominateur.

③ Si c'est un produit : On n'a pas besoin de mmettre au même dénominateur. Mais avant de faire les multiplications, on cherche des facteurs identiques en « haut »et en « bas »qu'on simplifie en premier.

Pour simplifier A, on utilise la première propriété $\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}$ si $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$A = \dfrac{4 \times 1}{4 \times 2} = \dfrac{1}{2}$

B est un produit, et on trouve 7 comme facteur commun en haut et en bas, donc on peut les simplifier avant de faire les multiplications !

$B = \dfrac{10 \times 7}{7 \times 5} = \dfrac{10}{5} = 2$

C est une somme, donc il faut mettre au même dénominateur. Il faut trouver un partage qui permette de "couper"en 6 et de couper en 3. Il faut ainsi couper en 6 (une illustration avec un gâteau permet de mieux appréhender cette notion). On dit que 6 est le dénominateur commun, et on peut ensuite utiliser la règle 2.

$$C = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

D est un produit. On pense à simplifier des facteurs communs si possible. Ils ne sont pas immédiatement présents, mais on remarque qu'on peut écrire 14 comme 2×7 et 9 comme 3×3. On a donc les 3 et les 7 qui vont se simplifier. On effectue alors les multiplications avec les nombres restants.

$$D = \frac{3}{7} \times \frac{14}{9} = \frac{3 \times 14}{7 \times 9} = \frac{3 \times 7 \times 2}{7 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Pour E on ne peut pas simplifier par 3 car on ne peut pas utiliser la règle 1 à cause du signe +
$E = \dfrac{4+3}{5+3} = \dfrac{7}{8} \neq \dfrac{4}{5}$
F est un produit, on peut écrire 3 comme $\dfrac{3}{1}$ et ensuite simplifier par 3. Une interprétation sous forme de gâteau nous confirme bien que lorsqu'on mange 3 fois les deux tiers d'un gâteau, on a finalement mangé 2 gâteaux.
Donc $F = 3 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{1} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{3 \times 2}{1 \times 3} = \dfrac{2}{1} = 2$ (par pitié, ne laissez pas $\dfrac{2}{1}$).

III Utiliser les puissances de 10

Propriété : calcul avec les puissances
Cadre : On considère deux nombres entiers relatifs n et m.
$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ $\qquad \dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$ $\qquad (10^m)^n = 10^{m \times n}$

Exemples :

- $A = 10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$
- $C = 10^3 \times 10^{-5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$
- $D = \dfrac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^{-3-(-6)} = 10^{-3+6} = 10^3$

Remarque : Attention, il n'y a pas de règle pour l'addition ou la soustraction de puissances :
$10^3 + 10^{-2} = 1000 + 0,01 = 1000,01$

Point-méthode 2 : Utiliser des expressions avec des puissances

1. L'âge de la Terre est d'environ 4500 millions d'années. Donner l'écriture scientifique, en années, de l'âge de la Terre.
2. La taille d'une bactérie est d'environ 3 μm. Donner l'écriture scientifique, en m, de la taille d'une bactérie.
3. Déterminer l'écriture scientifique de $B = \dfrac{8 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-12}}{15 \times 10^8}$.

Solution :

1. $4,5 \times 10^9$
2. 3×10^{-6}
3. la forme scientifique est une écriture du type : $a \times 10^n$ où a est un nombre réel compris entre 1 et 10 et strictement inférieur à 10. On commence donc par regrouper les puissances de 10 ensemble.
$B = \dfrac{8 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-12}}{15 \times 10^8} = \dfrac{8 \times 3}{15} \times \dfrac{10^5 \times 10^{-12}}{10^8} = \dfrac{8 \times 3}{5 \times 3} \times \dfrac{10^{-7}}{10^8} = \dfrac{8}{5} 10^{-7-8} = 1,6 \times 10^{-15}$.

IV Calculer avec les racines carrées

Définition 2 ***La racine carrée d'un nombre positif*** *a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a :*

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Remarques : Le carré d'un nombre est toujours positif
Lorsque a est un nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas!!!

Exemples :

- $\sqrt{1} = 1$ car $1^1 = 1$ et 1 est positif.
- $\sqrt{36} = 6$ car $6^6 = 36$ et 6 est positif.
- $\sqrt{(-5)^2} \neq -5$ car -5 est négatif! Dans ce cas, $\sqrt{(-5)^2}$ existe et $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{(-5)\times(-5)} = \sqrt{25} = 5$.

Remarques : $\sqrt{3}$ est un nombre à part entière et on le manipulera sous cette forme. On parle de *valeur exacte*.

Propriété : calculs avec les racines carrées
Cadre : Pour tous nombres positifs a et b :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (b \neq 0)$$

Exemples : $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{2\times 3} = \sqrt{6}$ $\qquad \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\qquad \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

Remarques : ATTENTION, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a}-\sqrt{b}$ (tester avec $a = 16$ et $b = 9$)

Point-méthode 3 : Simplifier des racines carrées

Ecrire les nombres suivant sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$.
1) $A = \sqrt{32}$ 2) $B = \sqrt{27}$ 3) $C = \sqrt{32} + 5\sqrt{2}$.

Solution :

On va décomposer en facteurs premiers les nombres, ou tout du moins faire apparaître des facteurs 2 fois, ce qui va permettre de les sortir de la racine.

1. $A = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
2. $B = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{9}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
3. $C = \sqrt{32} + 5\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (4+5)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$